Exercice 1

Une urne contient 3 boules numérotées de 0 à **2.** Un joueur extrait une boule de cette urne. On note $\boldsymbol{X}$ la variable égale au numéro de la boule obtenue. Si $\boldsymbol{X}$ prend la valeur $\boldsymbol{k}$, le joueur effectue une série de $\boldsymbol{k}$ lancers d'un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4. On définit alors $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face 1 a été obtenue lors de cette série de $\boldsymbol{k}$ lancers.

❶ Reconnaitre la loi de la variable $\boldsymbol{X}$. Préciser l'espérance et la variance de cette variable $\boldsymbol{X}$

❷ Soit $\boldsymbol{k} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}]$. Déterminer la loi conditionnelle de la variable $\boldsymbol{Y}$ sachant que $(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k})$

❸ En déduire la loi du couple $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. On pourra présenter celle-ci à l'aide d'un tableau à double entrée.

❹ Déterminer la loi de la variable $\boldsymbol{Y}$ puis calculer $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$

❺ Les variable $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont-elles indépendantes ? Justifier rigoureusement.

❻ Calculer la covariance du couple $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Interpréter ce résultat.

Réponse

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Exercice 2

❶ Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale $U \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$

a Rappeler une densité de U

b Montrer que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

❷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, \text{ si } x > 0 \\ 0 \quad , \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

a Montrer que la fonction f définit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X

b Déterminer F définit une fonction de répartition de variable aléatoire X

❸ a Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

b Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c En déduire que X admet une variance $V(X)$ que l'on précisera.

Réponse

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Exercice 3

Soient $\boldsymbol{A}$ et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ données par : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

❶ a Calculer $\boldsymbol{A}^2 - 7\boldsymbol{A}$

b En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ sont les réels 3 et 4

c Montrer que la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible

❷ On pose : $\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{X_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a Calculer $\boldsymbol{BX_1}, \boldsymbol{BX_2}$ et $\boldsymbol{BX_3}$

b En déduire que la matrice $\boldsymbol{B}$ est diagonalisable

c Déterminer la matrice $\boldsymbol{Q}$ définie par $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$

❸ On pose : $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a Montrer que $\boldsymbol{P}$ est inversible et que $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b Déterminer la matrice $\boldsymbol{PD} = \boldsymbol{AP}$

c En déduire que la matrice $\boldsymbol{B}$ est diagonalisable

Réponse

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Exercice 4

COn définit pour tout entier $n \geqslant 0 \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{t^2} dt$

❶ Justifier l'existence de I_n pour tout entier $n \geqslant 0$ .Puis calculer la valeur de I_0

❷ Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs et décroissante.

❸ Démontrer que pour tout $n \geqslant 0 \quad I_n \leqslant \frac{e^{-n}}{n}$

❹ A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier n

$$I_n = \frac{e^{-n}}{n} - \frac{2}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{t^3} dt$$

❺ Démontré que pour tout entier n ; $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{t^3} dt \leqslant \frac{e^{-n}}{n}$ puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n e^n I_n = 1$

Réponse

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Exercice 5

On considere la série numérique: $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa n -ième somme partielle.

a. Justifier que: $\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant \frac{1}{e^k}$

b. En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leqslant \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$

c. Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$

d. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge.

Exercice 6

Soit θ un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x^3}{\theta^4} & \text{si } 0 < x < \theta \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

❶ Montrer que f est une densité.

❷ On note X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X

❸ Justifier que X admet une espérance et une variance qu'on précisera.

❹ Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

a. Calculer le biais de $\bar{X}_n$

b. Proposer un estimateur T_n de θ qui soit sans biais.

c. Calculer son risque quadratique noté $r(T_n)$

Réponse

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....