Exercice 1

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (n,m) & \mapsto & n+m \end{array}$

❶ Montrer que f n'est pas injective.

❷ Montrer que f est surjective.

Exercice 2

Soit f l'application déinie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$

❶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $f(x) = 3$. f est-elle injective ?

❷ Montrer que $f(x) \geqslant 2$. f est-elle surjective ?

Exercice 3

Soit f l'application déinie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x+3y, x+2y)$

❶ Montrer que f est injective et surjective

❷ En déduire que f est une bijection déterminer f^{-1}

Exercice 4

Soit f l'application déinie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = 2x + y$

❶ Montrer que f est surjective et non injective

❷ Déterminer $f(A \times A)$ où $A = \{-1; 2\}$

Exercice 5

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \end{array}$

❶ Montrer que : $f(\mathbb{R}) = \left]0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; $f^{-1}([1;2]) = \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$. f est-elle surjective?

❷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-1-x) = f(x)$. f est-elle injective?

❸ Montrer que l'application f est une bijection de $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ dont vous préciserez l'application réciproque.

Exercice 6

Soient A une partie d'un ensemble E. Considérons l'application

$$f_A : P(E) \to P(E) \quad : \; X \mapsto X \cap A$$

❶ Donner le diagramme sagittal dans le cas ou $E = \{a,b,c\}$ et $A = \{a,b\}$

❷ Montrons que f_A est injective si, et seulement si, $A = E$

❸ Montrons que f_A est surjective si, et seulement si, $A = E$

Exercice 7

vspace0.2cm Soit f l'application déinie de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$ par : $f(p,q)=p+\dfrac{1}{q}$

❶ Montrer que l'equation $f(p,q)=\dfrac{7}{4}$. n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$

❷ est-elle injective ? est-elle surjective ?

Exercice 8

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{(x-2)^2+\frac{1}{2}} \end{array}$

❶ Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset]0;2[$.

❷ f est-elle surjective?

❸ Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(4-x)=f(x)$.

❹ f est-elle injective?

Exercice 9

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

❶ Montrer que f est injective.

❷ Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}):|f(x)|<1$.

❸ f est-elle surjective?

❹ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 10

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2} \end{array}$

❶ Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.

❷ f est-elle surjective?

❸ Montrer que $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$.

❹ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 11

On pose $I\ =]0;+\infty[$. Considèrons l'application f définie par: $\begin{array}{rccc} f & : I^2 & \to & I^2 \\ & (x;y) & \mapsto & \left(xy;\dfrac{x}{y}\right) \end{array}$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Exercice 12

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

❶ Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(E)$ on a :

- a $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- b $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- c $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie?
- d f injective $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

❷ Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2(F)$ on a :

- a $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
- b $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- c $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exercice 13

oient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Montrer que:

❶ f injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) : f^{-1}(f(A)) = A$

❷ f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F) : f(f^{-1}(B)) = B$

❸ f injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) : f(C_E^A) \subset C_F^{f(A)}$

❹ f surjective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) : C_F^{f(A)} \subset f(C_E^A)$

❺ f bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) : f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$

Exercice 14

oit E un ensemble non vide et soient A et$B$ deux parties de E. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{llll} f & : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\ \ \mathcal{P}(B) \\ & & X & \mapsto & (X \cap A; X \cap B) \end{array}$$

❶ Montrer que : f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

❷ Montrer que : f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

❸ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective. Dans ce cas, déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 15

oit E un ensemble non vide et soient A et$B$ deux parties de E. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{lllll} f & : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\ \ \mathcal{P}(B) \\ & & X & \mapsto & (X \cup A; X \cup B) \end{array}$$

❶ Montrer que : f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

❷ Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $f(X) = (\emptyset; \emptyset)$.

❸ f est-elle surjective?