

Exercice 1

Soit E l'ensemble définie par :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\}$$

❶ Vérifier que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

❷ Déterminer l'ensemble $F = E \cap \mathbb{Z}^2$ en extension

❸ Montrer que : $E = \left\{ \left(\frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 + 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

Exercice 2

Soient A et B les ensembles définie par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / 4 \leq \frac{3|x| - 1}{2} \leq 7 \right\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \leq 0\}$$

❶ Ecrire en extension l'ensemble A

❷ Ecrire en extension l'ensemble B

❸ Déterminer : $A - B$; $B - A$ et $C_{\mathbb{R}}^B$

Exercice 3

Soient les deux ensembles A et B tel que :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que : $A \cap B = \emptyset$

Exercice 4

Soient $A; B$ et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

❶ Montrer que : $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

❷ Montrer que : $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

❸ Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Exercice 5

Soient $A; B; C$ et D quatre parties d'un ensemble E

❶ Montrer que : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

❷ Montrer que : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

❸ Montrer que :

$$(\overline{(B \setminus C)}) \cup A = E \text{ et } (C \setminus D) \cup A = E \Rightarrow (B \setminus D) \subset A$$