Lycée Ennour	**Devoir surveillé N°:2**	1BAC-SM-BIOF
El Jadida	SEMESTRE 1	Prof: Karimine Ahmed

Exercice 1

❶ a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}$

b) Montrer par récurence que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$

❷ Soient E un ensemble, A et B deux parties de E.

a) Montrer que $(A \cup B)\backslash(A\backslash B) = B$

b) Montrer que $A \cup (\overline{A \cup B}) = A \cup \overline{B}$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = \left\{ \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} / x \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$

❶ Montrer que $\dfrac{2}{5} \in E, \quad et \quad 1 \notin E$

❷ Montrer que $\quad E \subset \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$

❸ Montrer que $\left(\forall y \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]\right) \left(\exists x \in \mathbb{R}^+\right) \left(y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

❹ En déduire que $\quad E = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$

Exercice 3

On considère l'application f définie par: $\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \end{array}$

❶ Montrez que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(1-x) = f(x)$. $\quad f$ est-elle injective?

❷ a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

b) En déduine que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. $\quad f$ est-elle surjective?

❸ Montrer que $f(\mathbb{R}) = \left]0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ et $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]\right) = \left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

❹ Soit g la restriction de f sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

a) Montrez que g est injective

b) Montrer que l'application g est une bijection de $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ dont vous préciserez l'application réciproque f^{-1}.