TCS: BIOF	**Ensembles $\mathbb{N}$-$\mathbb{Z}$-$\mathbb{D}$-$\mathbb{Q}$-$\mathbb{R}$**	Prof: Ahmed Karimine
2020-2021	Série 4	Groupe Scolaire ENNOUR

Exercice 1

❶ Déterminer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ dans lequel les nombres suivants appartiennent.

a $a = \frac{5}{3}$ c $c = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$ e $e = \frac{3+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ g $g = \sqrt{27}\text{x}\sqrt{12}$

b $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ d $d = \frac{7}{2^3\text{x}5}$ f $f = 1+\sqrt{5}$ h $h = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

❷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. même question avec les nombres suivants:

$$a = 3^{n+1}\times\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\right) \quad , \quad b = 4\times2^{n-1} - 4^n\times\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad c = \left(\frac{1}{4}\right)^n\times(2^n+1)^2$$

Exercice 2

Simplifier (On suppose que les expressions algebriques sont définies)

❶ a $A = \dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+1} + \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}$

b $B = 11\sqrt{3} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$.

c $C = \dfrac{\dfrac{a-1}{a+1} - a}{\dfrac{a(a-1)}{a+1} + 1}$

d $D = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}-1)^2$

e $E = \dfrac{(-xy^2)^5\left(\dfrac{xz^2}{y^3}\right)^2}{(xyz^{-2})^3}$

f $F = \left(3a^2b^5\right)^4\left(3^2a^{-3}b\right)^{-1}\left(3^3ab^2\right)^{-5}$

❷ Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$ Simplifier :

a $7a\sqrt{b^2} + \sqrt{25a^2b^2} + 13b\sqrt{a^2}$ b $4a\sqrt{b^2} + \sqrt{49a^2b^2} + 13b\sqrt{a^2}$

Exercice 3

Soient $a = (2+\sqrt{3})^2$ et $b = 3 - 4(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})$

❶ Montrer $a = 7+4\sqrt{3}$ et $b = 7-4\sqrt{3}$

❷ Montrer $b \in \mathbb{R}^+$

❸ Calculer $a+b = 14$ et $ab = 1$

❹ En déduire que $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 4$

❺ On pose $c = \sqrt{b}-\sqrt{a}$

a Vérifier que $c \in \mathbb{R}^-$

b Calculer c^2 puis en déduire la valeur de c

❻ Montrer que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = (a+b)^2 - 2ab$ puis calculer $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

❼ Montrer que $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2 = (b-a)^2$. En déduire que $\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}$

Exercice 4

Soient $a = 9 + 4\sqrt{5}$ et $b = 9 - 4\sqrt{5}$

❶ Calculer ab ; a^2 et b^2

❷ En déduire que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 322$

❸ En déduire que $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}} \in \mathbb{N}$

❹ Montrer que $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} = 1$

❺ Montrer que $a^{2021}b^{2020} + a^{2020}b^{2021} = 18$

Exercice 5

❶ a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$; $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{9}{x^2} = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right)^2 + 2$

On pose $a = \sqrt{13} + 2$.

b Vérifier que $a^2 = 15 + 4\sqrt{13}$ et $\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{a} = \dfrac{4}{3}$

c En déduire la valeur de $\dfrac{17 + 4\sqrt{13}}{9} + \dfrac{9}{17 + 4\sqrt{13}} - 1 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

Exercice 6

❶ On pose

$$\alpha = \sqrt{16 + 6\sqrt{7}}\ ,\ \beta = \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}, A = \alpha + \beta \text{ et } B = \alpha - \beta$$

a Calculer A^2 et B^2 .

b En déduire que : $A = 6$ et $B = 2\sqrt{7}$

c En déduire que : $\alpha = 3 + \sqrt{7}$ et $\beta = 3 - \sqrt{7}$

Exercice 7

❶ Etablir que pour tout réel x on a $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

❷ Montrer que $(9 - \sqrt{5})^3 + (9 + \sqrt{5})^3 = 12^3$

❸ Developper et simplifier les expressions suivantes:

a $\left(x + \sqrt{2} + 1\right)\left(x + \sqrt{2} - 1\right)$

b $x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x}\left(1 + x - x^2\right)$

❹ Factoriser les expressions suivantes:

a $8x^3 - 27 + (3x-1)^3 - (x+2)^3$

b $(9x^2 - 12x + 4) + (x-3)^2 - (2x+1)^2$

c $(2x-1)^3 + (2x+1)^3$

d $(4a^2 + b^2 - 9)^2 - 16a^2b^2$

❺ Mettre au même dénominateur et simplifier

a $A = 2x \times \left(1 - \dfrac{5x}{4}\right)$

b $B = \dfrac{2x}{3x+1} - \dfrac{x}{3}$

c $C = \dfrac{4}{1-4x} - x + 2$

d $D = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

e $E = \dfrac{\sqrt{2}}{x+3} - \dfrac{1-3x}{x+2}$

f $F = \dfrac{4-3x}{2x+5} - \dfrac{2x}{7-3x}$