G.S Ennour	**Ensembles**	www.karimine.me
2020-2021	Série **2**	1SM-Biof

Exercice 1

On considère l'ensemble $E=\left\{(-1)^n+(-1)^m \;/(n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$

❶ Ecrire l'ensemble E en extension.

❷ Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 2

On considère les deux ensembles :

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}\;/\;\frac{n^2-2n+5}{n-1}\in\mathbb{N}\right\}\;;\;B=\left\{x\in\mathbb{Z}\;/\;\left|\frac{1-x}{2}\right|\leqslant 1\right\}\quad\text{et}\quad C=B\setminus A$$

❶ Ecrire en extension les ensembles : A , B et C.

❷ Ecrire en extension les ensembles : $A\triangle B$, $\mathcal{P}(A)$ et $C\times A$.

Exercice 3

On considère les deux ensembles $E=\left\{-\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\;/\;k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{1}{2}+k\;/\;k\in\mathbb{Z}\right\}$

❶ Montrer que $F\subset E$.

❷ Montrer que $-\frac{1}{6}\in E$.

❸ Montrer que $-\frac{1}{6}\notin F$.

❹ A-t-on $E=F$?

Exercice 4

On considere l'ensemble $E=\left\{\frac{x^2-1}{x^2+1}\;/x\in\mathbb{R}\right\}$

❶ a) Montrer que $\frac{4}{5}\in E$ et $-\frac{5}{4}\notin E$

b) $E\subset[-1;1[$

❷ a) Démontrer que $E=[-1;1[$

b) Déterminer $C_{\mathbb{R}}^{E}$ et $E\setminus\overline{\mathbb{Z}}$

Exercice 5

On considère l'ensemble $A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\;/\;n\in\mathbb{N}^*\right\}$

❶ Montrer que $A\neq\emptyset$.

❷ Montrer que $\sqrt{2}\notin A$.

❸ Montrer que $A\subset]1;+\infty[$

❹ A-t-on $A=]1;+\infty[$?

Exercice 6

On considère l'ensemble $E=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{nm}\;/\;(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right\}$

❶ Montrer que $0\notin E$ et que $\frac{1}{2}\in E$

❷ Montrer que $E\subset\,]0,1]$

Exercice 7

On considère les ensembles $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;/\;x-2y=1\right\}$ et $B=\{(3+2t,1+t)\;/\;t\in\mathbb{R}\}$

❶ Montrer que $(3;1)\in A\cap B$

❷ Vérivier que que $(4;2)\in B$

❸ Montrer que $B\subset A$

❹ En déduire que $A=B$

Exercice 8

n considère les ensembles $A=\{4k+3 \ / \ k\in\mathbb{N}^*\}$ et $B=\{4k+1 \ / \ k\in\mathbb{N}^*\}$

Montrer que $A\cap B=\emptyset$

Exercice 9

Soint A, B et C trois parties d'un ensemble E simplifier les écritures suivantes

❶ $A\cap(\overline{A}\cup B)$ | ❷ $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ | ❸ $A\cap(B\cap(B\cup\overline{C})$ | ❹ $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$

Exercice 10

Soint A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

❶ $\begin{cases} B\subset A \\ C=A\setminus B\end{cases} \Rightarrow A=B\cup C$

❷ $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$

❸ $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$

❹ $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

❺ $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$

❻ $B\cup(A\setminus B)=A \Leftrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$

Exercice 11

Soint A *et* B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

❶ $(A\setminus(A\setminus B))=A\cap B$

❷ $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$

❸ $B\cup(A\setminus B)=A \Leftrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$

❹ $A\triangle B=\overline{A}\triangle\overline{B}$

Exercice 12

On considère les deux ensembles

$$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y=x+2\right\} \text{ et } F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2+4-2xy+4x-4y=0\right\}$$

❶ Montrer que $E\subset F$

❷ Développer $(y-x-2)^2$ puis en déduire que $E=F$?

Exercice 13

On considère les deux ensembles $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\leqslant y\right\}$ et $F=\left\{(2t;t^2+1) \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}$

❶ Montrer que $(0;0)\notin F$ | ❷ Montrer que $E\subset F$ | ❸ A-t-on $E=F$?

Exercice 14

On considère les deux ensembles

$$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2-2y^2+xy+x+2y=0\right\} \text{ et } F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x+2y=0\right\}$$

❶ Montrer que $E\neq\emptyset$ et $F\subset E$

❷ Déterminer un réel y sachant $(1,y)\in E$ A-t-on $E=F$? justifier

❸ Déterminer un ensemble G vérifiant $E=F\cup G$

Exercice 15

On considère les deux ensembles $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ et $F=[-1;1]$

❶ Montrer que $E\subset F^2$ et $E\neq F^2$.

❷ Démontrer que E ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.