GS Ennour | **Logique et raisonnemnt** | Prof: Karimine

2020-2021 | Série 1 | 1Bac-SM

Exercice 1

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis donner leur négation

❶ $p\ :\ (\forall x \in \mathbb{R});\ \ x \geqslant x^2 \ \Rightarrow\ |x| = x$

❷ $q\ :\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \big(x \text{ est impair } \textit{ou } x^2 \text{ est pair}\big)$

❸ $r\ :\ (\forall x > 0); x + \dfrac{9}{x} \geqslant 6$ et $\dfrac{x+1}{2} \geqslant \sqrt{x}$

❹ $s\ :\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow x \in]-1;0[$

Exercice 2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2-x} \geqslant x$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|1-x| = 2|x| - 1$

Exercice 3

❶ Montrer que: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a^2 + b^2 = 1 \ \Rightarrow\ |a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

❷ Soient a et b deux réels distincts . Montrer que $a \neq -\dfrac{5}{4}b \ \Rightarrow\ \dfrac{2a+b}{a-b} \neq \dfrac{2}{3}$

❸ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $\sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$

❹ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. $(x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \Leftrightarrow (x = y = 1)$.

❺ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \sqrt{x^2} = 2x + 3 \ \Leftrightarrow\ x = -1$

❻ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le systeme : $\begin{cases} xy - 2y - 3x + 6 = 0 \\ xy - x + 3y = 0 \end{cases}$

❼ Montrer que : $(\forall y \in]1,+\infty[)(\exists x \in]2,+\infty[)$: $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = y\right)$

Exercice 4

❶ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ ;\ \ cos(n\pi) = (-1)^n$

❷ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ ;\ \ 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

❸ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ ;\ \ 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

❹ Montrer que $(\forall n \geqslant 6) : 2^n \geqslant 6n + 7$

❺ Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Exercice 5

❶ Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| < |a|$. Montrer que :

a) Montrer que $x \neq 0$.

b) Montrer que x est a ont même signe

❷ Soint a et b deux rationnels tels que $a \neq b$. On pose $\alpha = \dfrac{a + b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

a) Montrer que $\alpha \neq b$

b) Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$