1Bac-SM 2020-2021	DM-4 **Généralités sur les fonctions**	GS ENNOUR Prof: KARIMINE

Exercice 1

Soit la fonction f telle que $f(x) = x^3 + x^2 + x$

❶ Montrer que $\left(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$; $x^2 + y^2 + xy + x + y + 1 > 0$

❷ Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

❸ On considère la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}}$

a. Vérifier $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b. En déduire la monotonie de h

Exercice 2

on considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

❶ Montrer que f minorée

❷ a. Montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f?

❸ On pose $h(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a. Montrer que $T_g = \dfrac{1 - xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b. Etudier les variations de g sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

c. Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que : $a + b \geq 2.$ Montrer que $a + b + \dfrac{1}{a+b} \geq \dfrac{5}{2}$

d. Vérifier que $f = g \circ h$ puis étudier les variations de f sur D_f

Exercice 3

Soit f_m la fonction définie par : $f_m(x) = \dfrac{x^2}{m} - 2x$ où m est un réel strictement positif

❶ Dresser le tableau des variations de f_m . En déduire que $\dfrac{x^2}{m} + m \geq 2x$

❷ En déduire que : $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{x + 1 - E(x)}$

❶ Démontrer que $D_f = \mathbb{R}$.

❷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x+1) = f(x)$

❸ Montrer que $\forall x \in [0;1[$; $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Puis traçer $\mathcal{C}_f$ sur $[-1;3[$