Prof : Ahmed Karimine

Niveau : 1Bac-SM-Biof

GS Ennour

Série n°8 ❀Trigonométrie

Année scolaire : 2020-2021

Exercice 1

Vérifier les identités suivantes:

❶ $1+\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

❷ $2\sin x+\sin 2x=8\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$

❸ $(1+\cos x)\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\sin x$ ou $(k\in\mathbb{Z})\quad x\neq(2k+1)\pi$

Exercice 2

❶ Montrer que pour tous réels a et b de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ où $k\in\mathbb{Z}$ on a : $\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

❷ Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$

a) Montrer que $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\sin 2x}{2\cos(2x)-1}$

b) Montrer que $\cos x(2\cos(2x)-1)=\cos 3x$

c) En déduire que $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\tan 3x+\dfrac{2\sin x}{\cos 3x}$

Exercice 3

❶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi[$

a) $\left(2\cos(2x)-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0$

b) $\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

❷ Résoudre dans $[0,2\pi[$

a) $\sqrt{3}\cos x-\sin x\leqslant 1$

b) $(\sqrt{2}\cos x-1)(2\sin x-\sqrt{3})\leqslant 0$

Exercice 4

Soit $f(x)=4\sin x\cos^3 x-\sin 2x$

❶ Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{2}\sin 4x$

❷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x-f(x)=0$

❸ Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation: $\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot f(x)<0.$

Exercice 5

Soit $A(x) = \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) - 1$

❶ Ecrire $A(x)$ sous la forme : $r\cos(2x - \varphi) - 1$. où r et φ sont deux réels que l'on déterminera.

❷ a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(x) = 1 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$.

b En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

❸ Soit $B(x) = A(x) + 1 - 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

a Vérifier que $B(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\left[1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

b Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $B(x) = 0$.

c Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation : $B(x) \leqslant 0$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

❶ Montrer que $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

❷ Montrer que $f(x) = 4\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ puis déduis la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

❸ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$; l'equation $f(x) = 0$

❹ Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

a Déterminer le domaine de définition D de f.

b Montrer que pour tout $x \in D; g(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

c En déduire que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

d Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $(2 + \sqrt{3})\cos x + \sin x = 0$

e Résoudre dans IR puis dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation $(2 + \sqrt{3})\cos x + \sin x > 0$

Exercice 7

Soit la fonction définie par $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$

❶ a Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

b résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$

❷ soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x}$

a Déterminer, le domaine de définition de g.

b Montrer que $g(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Puis résoudre dans $[0, \pi]$ $g(x) \geqslant \frac{1}{2}$

Exercice 8

❶ a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) En déduire que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

❷ On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : \sin x - (\sqrt{2} - 1)\cos x = 1$

a) Vérifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

b) Montrer que (E) est équivalente à $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

c) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E)

Exercice 9

Soit x un réel. On pose $A(x) = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$

❶ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); A(x) = \sin 7x - \sin x$

❷ En déduire la valeur de la somme $S = \sin^2\dfrac{2\pi}{7} + \sin^2\dfrac{4\pi}{7} + \sin^2\dfrac{6\pi}{7}$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

❶ Dterminer D_f le domaine de définition de f

❷ Montrer que $(\forall x \in D); f(x) = \left(\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$

❸ Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ puis en déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

❹ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : f(x) = (\sqrt{2} - 1)^2$

Exercice 11

Soit $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{4\sin x}; x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

❶ Calculer $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

❷ Montrer que $f(x) = 2\cos^3 x - \cos x$.

❸ Soit l'équation $(E) : 8x^3 - 4x - 1 = 0$

a) Vérifier que $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$ sont deux solutions de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

c) En déduire la valeur exact de $\cos\dfrac{\pi}{5}$