Série n°7 ❀ Suites numériques

Exercice 1

❶ Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 2 - \dfrac{n+1}{2^{n+2}}$

a) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

b) La suite (u_n) est-elle majorée ?

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $, n+1 \leqslant 2^{n+2}$. La suite (u_n) est-elle minorée ?

❷ Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 2 + \dfrac{1}{u_n}$

a) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 3 et minorée par 2.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

❶ Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n < 3$.

❷ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

❸ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

b) En déduire l'expression de v_n et de u_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

❶ a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante

❷ On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique . puis écrire v_n en fonction de n.

❸ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \neq 1$. et $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

❹ Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

Exercice 4

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad et \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

❶ On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

❷ On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.
Montrer que la suite (v_n) est constante. Puis préciser quelle est la valeur constante de v_n.

❸ Déterminer les expressions de a_n et b_n pour tout entier naturel n.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n. \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

❶ Calculer u_2 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

❷ On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 6$

a) Montrer que (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

❸ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

❶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$ et $|U_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{4}|U_n - 4|$

❷ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, : $|U_n - 4| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 7

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \ \ et \ \ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = U_{n+1} - U_n$

❶ Démontrer que (V_n) est géométrique

❷ a) Exprimer la somme $S_n = V_0 + V_1 + .. + V_{n-1}$ en fonction de n

b) Vérifier que $S_n = U_n - U_0$ puis en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\, U_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

Exercice 8

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$.

❶ Montrer que la suite (v_n) est géométrique. de raison $\dfrac{1}{5}$. Puis exprimer v_n en fonction de n.

❷ On définit la suite (w_n) en posant,$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

a Montrer que la suite (w_n) est arithmétique de raison 5. Puis exprimer w_n en fonction de n.

b En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) :; u_n = \dfrac{n}{5^{n-1}}$

❸ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :; 0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{5}u_n$ et que ; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

❶ Montrer que la suite définie par $v_n = u_n - n + 1$ est géométrique . Puis exprimer v_n et u_n en fonction de n.

❷ Montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{1}{2}\left(3^{n+1} + n^2 - n - 3\right)$

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ où le tableau de variations de la fonction f est ci contre.

x	1	5
$f(x)$	1 ↗	4

❶ Montrer que $1 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier n.

❷ Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 11

On pose $u_0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$

❶ Déterminer $J = f([1,2])$. Puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

❷ Montrer que $\forall (x,y) \in J^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{9}|x-y|$

❸ On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$

❹ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie par : : $\quad U_0 = \dfrac{13}{4}$ et $U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

❶ Montrer que $n \in \mathbb{N}$; $3 < U_n < 4$

❷ Montrer que $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$

❸ Etudier la monotonie de (U_n)

Exercice 13

Soient (U_n) une suite géométrique raison $q \in \mathbb{R}^*$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}^*$

On pose : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$; $P = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$ et $T = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n-1}}$

Montrer que $\dfrac{S}{T} = u_0^2 q^{n-1}$ et $P^2 = \left(\dfrac{S}{T}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 14

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \dfrac{3}{2 + U_n} \end{cases}$

❶ Montrer que $\quad 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{3}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

❷ On pose $\quad x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Montrer que $\quad x_n < 1$ et $y_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

❸ Montrer que $\quad x_{n+1} = \dfrac{6 + 3x_n}{7 + 2x_n}$ et $y_n = \dfrac{3}{2 + x_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

❹ Montrer que $\quad (x_n)$ est croissante et (y_n) décroissante

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$

et la fonction $g = f \circ f$, Soit (u_n) la suite telle que : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

❶ Dresser le tableau de variation de la fonction f

❷ Montrer que la fonction g est croissante sur $[0, 1]$.

❸ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = u_{2n}$

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$

b Montrer par récurrence que (α_n) est décroissante

❹ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = u_{2n+1}$

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = g(\beta_n)$

b Montrer par récurrence que (β_n) est croissante