3 | Séries numériques

I – Convergence

1 – Définitions

Définition 3.1 – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$ est appelé **la somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$.

Remarque 3.2 – Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0}u_n$. La suite des **sommes partielles** est alors $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n}u_k$.

Exemple 3.3 –

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}n$. Son **terme général** est $u_n = n$.
   Les premières **sommes partielles** sont

   $$S_0=0,\qquad S_1=0+1=1,\qquad S_2=0+1+2=3,\qquad S_3=0+1+2+3=6,\qquad \text{etc.}$$

   De manière générale, on peut montrer par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$ que

   $$\forall n\in\mathbf{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Son **terme général** est $u_n=\frac{1}{n}$.
   Les premières sommes partielles sont

   $$S_1=1,\qquad S_2=1+\frac12=\frac32,\qquad S_3=1+\frac12+\frac13=\frac{11}{6},\qquad S_4=1+\frac12+\frac13+\frac14=\frac{25}{12},\qquad \text{etc.}$$

   Il n'existe pas de formule simple pour la somme partielle S_n d'indice n.

2 – Séries convergentes

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 3.4 – Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série et S_n sa somme partielle d'indice n.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**.

  La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est alors appelée la **somme** de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et on note

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** de la série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque 3.5 –

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisqu'elle désigne une suite.
- Tout comme on ne confond pas la suite (u_n), le n-ième terme u_n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ, il convient de ne pas confondre la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, la n-ième somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et la somme éventuelle $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.
- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité ce sont des limites, il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calculera *(presque)* toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

Exemple 3.6 –

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par $u_n = 0$. Alors, la somme partielle d'indice n est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc clairement convergente et sa limite vaut 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0$ **converge** et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par $u_n = 1$. Alors, la somme partielle d'indice n est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ **diverge**.

3 – Premiers exemples

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Son terme général est $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   La **somme partielle d'indice** n est
   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par
   $$\forall n\in\mathbf{N},\quad S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
   Or, $\frac{1}{2}\in\,]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2$.
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc **convergente** et on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2$.
2. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.
   Son terme général est $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. La somme partielle d'indice n est
   $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par
   $$\forall n\in\mathbf{N},\quad S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ est donc convergente et on a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)=1$.
3. On reprend l'exemple de la série harmonique.
   Nous verrons dans les exercices que cette série est divergente.

4 – Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 3.7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, on a alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
- Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est également convergente, et on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

ATTENTION ! La réciproque du second point n'est pas vraie! La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ n'assure pas **du tout** la convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.

Exemple 3.8 – Par exemple, si l'on pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge alors que ni $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

5 – Suites et séries

Théorème 3.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente. Dès lors, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, et en notant ℓ sa limite, on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Théorème 3.10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

ATTENTION ! La réciproque est fausse ! $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant, la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 3.11

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

Exemple 3.12 – Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{2^n-3^n}$ sont divergentes.

6 – Convergence absolue

Définition 3.13 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 3.14

Toute série absolument convergente est convergente.

ATTENTION ! La réciproque de ce théorème est fausse.
En effet, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente.

II – Séries de référence

1 – Série géométrique

Définition 3.15 – Pour tout réel q, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle série géométrique de raison q.

On a vu précédemment que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2. En fait, plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 3.16

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

2 – Série exponentielle

Définition 3.17 – Soit $x \in \mathbf{R}$. La série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle.

Théorème 3.18

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exemple 3.19 –

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = e.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} - \frac{(\ln(5))^0}{0!} = e^{\ln(5)} - \frac{1}{1} = 5 - 1 = 4.$

Méthode 3.20 – Étudier la nature d'une série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et/ou calculer sa somme éventuelle

1. On regarde si le terme général tend vers 0.
   - Si la réponse est **non**, la série est **divergente**.
   - Si la réponse est oui, on ne peut pas conclure, il faut poursuivre l'étude.
2. On essaie d'exprimer la série sous la forme d'une série de référence (géométrique ou exponentielle).
3. Sinon, on poursuit l'étude en écrivant la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   On regarde si on peut simplifier S_n, en utilisant des changements d'indices, une mise en facteur ou par "téléscopage des termes". Puis on conclut à l'aide des résultats du cours.