Lycée Errazi ECT2

A.Karimine **Devoir maison** Année 2021

Exercice 1 : Récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que P est inversible et donner P^{-1}
2. Vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
   En utilisant le cours, donner l'expression de D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = P.D^n.P^{-1}$ (Voir cours Matrice 1)
4. En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 2 : Formule du binôme

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
2. Démontrer que $J^3 = 0$, puis que $J^k = 0$ pour $k \geq 3$
3. En déduire en utilisant la formule du binôme que

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

4. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$

Exercice 3 : (Extrait de ESCP 2016)

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit PQ.
2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
3. Vérifier la relation $AP = PD$.
4. Établir par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n sous forme explicite.