Lycée ERRAZI	**Calcul matriciel**	Prof: Ahmed Karimine
2021-2022	Devoir maison **3**	2ECT

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

❶ Calculer A^2 et déterminer deux réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.

❷ Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$$

❸ Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

❹ En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

❶ Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$$

❷ Montrer que la suite (a_n) est arithmético géométrique.

❸ En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On considère les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Que vaut $P^{-1}P$?

❷ On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n

❸ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n.

❹ Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.

b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.