Prof : Ahmed Karimine

Niveau : 1ECT

Lycée Errazi

Série n°1 ❀ La logique

Année scolaire : 2021-2022

Exercice 1

Exprimer les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs.

❶ Tout entier est le carré d'un entier.

❷ Tout entier est la somme de quatre carrés.

❸ Π existe des entiers qui sont somme de deux carrés.

❹ Il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres.

❺ Tout ensemble non vide inclus dans N admet un plus petit élément.

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, énoncer la négation, puis dire si la proposition est vraie ou fausse.

❶ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$;

❷ $\exists x \in \mathbb{R}, 2x - 1 = 12$;

❸ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n = 2p$;

❹ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbf{N}, p = 3n$;

❺ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n(n+1) = 2p$;

❻ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$;

❼ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, y < x$;

❽ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x = \mathrm{e}^y$.

Exercice 3

Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

❶ $(1 = 2) \Longrightarrow (\ln(1) = 1)$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 = 9\right) \Longrightarrow (x = 3)$;

❸ $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1) \Longrightarrow (x \geqslant 2)$;

❹ $\forall n \in \mathbb{N}, (n > 1) \Longrightarrow (n \geqslant 2)$;

❺ $\forall x \in \mathbb{R}, \left(3x - x^2 \geqslant 0\right) \Longrightarrow (x \geqslant 0)$.

Exercice 4

❶ On suppose que $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$
Montrer que $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

❷ Montrer que $5^n \geqslant 3^n + 4^n$ pour tout $n \geqslant 2$.

❸ Pour tout $n \geqslant 3, 2^n \geqslant n^2 - 1$.

❹ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

❺ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n\ln(x)$.

❻ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$.

❼ On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.