2ECT	**Probabilités Rappel**	Lycée ERRAZI
2021-2022	Devoir maison **4**	Prof: KARIMINE

Exercice 1

On considère deux boîtes, l'une est blanche, l'autre est rouge. La boîte blanche contient trois boules blanches et une boule rouge tandis que la boîte rouge contient deux boules rouges et une boule blanche.
On procède à une succession de tirages dans nos boites en respectant le protocole suivant:
- Au départ on choisit l'une des boîtes au hasard ;
- On effectue dans cette boîte un premier tirage, on note la couleur de la boule tirée puis on la replace dans la boite dont elle est issue ;
- On effectue alors un second tirage d'une boule dans la boîte de la couleur de la dernière boule tirée, on note la couleur obtenue puis on replace la boule dans sa boite;
- On recommence suivant le même procédé. On note, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mathbf{B}_n$ l'événement : « on tire une boule blanche lors du n^e tirage .
On note b_n la probabilité de cet événement.
On définit de même, l'événement $\mathbf{R}_n$ « on tire une boule rouge lors du n^e tirage de probabilité r_n.

❶ Calculer b_1 puis b_2.

❷ On effectue deux tirages successifs, ils amènent deux boules blanches. Quelle est la probabilité qu'on ait au départ choisi l'urne blanche?

❸ a) Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ les probabilités $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{B}_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n}(\mathbf{B}_{n+1})$.

b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre b_{n+1} et b_n.

❹ Reconnaître la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de b_n en fonction de n.

Exercice 2

On dispose de deux boîtes U et V : - U contient 3 boules blanches et 2 boules noires; - V contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire des boules une à une, chaque boule étant remise immédiatement dans la boîte d'où elle provient avant le tirage suivant. On effectue un nombre fini de tirages. La première boule est tirée de U. Si elle est blanche, la seconde boule est tirée de U; si la première boule tirée est noire, la seconde boule est tirée de $\mathbf{V}$. À chaque étape : - si le n^e tirage donne une boule blanche alors le $(n+1)^{e}$ tirage s'effectuera dans U - si le n^e tirage donne une boule noire alors le $(n+1)^e$ tirage s'effectuera dans $\mathbf{V}$. On définit les événements suivants, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$-\mathbf{B}_n$ **:** le n^e tirage donne une boule blanche
$-\mathbf{N}_n$ **:** le n^e tirage donne une boule noire .
On pose $p_n = \mathbf{P}(\mathbf{B}_n)$ et $q_n = \mathbf{P}(\mathbf{N}_n)$ les probabilités des événements $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{N}_n$.

❶ Donner les valeurs de p_1 et q_1

❷ Calculer, en justifiant clairement, p_2 et q_2.

❸ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{B}_{n+1}), \mathbf{P}_{\mathbf{N}_n}(\mathbf{B}_{n+1}), \mathbf{P}_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{N}_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{N}_n}(\mathbf{N}_{n+1})$.

❹ Pour tout n, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

❺ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $p_n + q_n$?

❻ En déduire une expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

❼ En déduire le calcul de p_n et q_n en fonction de n.

❽ Étudier la convergence des suites (p_n) et (q_n) et préciser leur limite.

❾ Déterminer la probabilité qu'on ne tire que des boules blanches lors des n premiers tirages.

Exercice 3

On considère les matrices: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

❶ Trouver la matrice Q qui vérifie $PQ = QP = I_2$.

❷ Vérifier que $QA = DQ$.

❸ Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nQ$.

❹ En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. À l'instant initial 0 , la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :
- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$,
- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans la pièce A ou dans la pièce C.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements :
A_n : "la mouche est dans la pièce A à l'instant n".
On définit de même les évènements B_n et C_n.
Enfin on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.

❺ Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

❻ Montrer que pour tout entier naturel n, on a $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$

❼ On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

a Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

b Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^nU_0$.

c Déduire de la question 2. que pour tout entier naturel n, on a

$$b_n = \frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

d En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.