2ECT	**Variables aléatoires finis**	Lycée ERRAZI
2021-2022	Devoir maison **5**	Prof: KARIMINE

Exercice 1

On considère un jeu où le joueur commence avec 5 points. À chaque partie, il tire à pile ou face avec une pièce où la probabilité d'obtenir pile est $\mathbf{2/3}$:
- s'il obtient pile, il gagne un point ;
- s'il obtient face, il perd un point.

Le joueur effectue 5 parties indépendantes. On définit la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ égale au nombre de piles obtenues.
On définit aussi la variable aléatoire $\boldsymbol{Y}$ égale aux nombre de points à l'issue des 5 parties.

❶ Quelle est la loi de $\boldsymbol{X}$?

❷ Écrire un programme Scilab qui simule la variable X.

❸ Quelle est la probabilité que le joueur n'ait plus de points ?

❹ Exprimer $\boldsymbol{Y}$ en fonction de $\boldsymbol{X}$.

❺ Quelle est l'espérance de $\boldsymbol{Y}$?

Exercice 2

❶ Écrire une commande Scilab qui simule un tirage d'une boule dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à **10.**

❷ Lors d'une épreuve orale de mathématiques, 50 élèves sont interrogés. Chacun choisit un sujet au hasard, indépendamment des autres. Il y a 30 sujets d'analyse, 20 sujets d'algèbre et 10 de probabilités.

a Quelle est la loi de la variable **X** égale au nombre d'élèves ayant choisi un sujet d'algèbre ?

b Quelle est l'espérance de $\boldsymbol{X}$? Quelle est la variance de $\boldsymbol{X}$?

c Écrire une instruction Scilab qui simule la variable $\boldsymbol{X}$.

d Quelle est la probabilité que $\boldsymbol{X} = \mathbf{25}$? (On ne demande pas de simplifier le résultat).

Exercice 3

les parties $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont totalement indépendantes
Les parties sont indépendantes mais dans chaque partie on considère une urne contenant initialement 4 boules
indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges. Les modalités de tirage sont différentes dans chaque partie.
A- On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On définit $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête. Pour $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :
$-\mathbf{R}_k$:≪ **au**$\boldsymbol{k}^{\mathbf{e}}$ tirage on tire une boule rouge **≫;**
$-\mathbf{B}_k$:≪ **au**$\boldsymbol{k}^{e}$ tirage on tire une boule blanche ˇ.

❶ Déterminer les valeurs prises par $\boldsymbol{Y}$.

❷ Écrire un programme Scilab qui simule la variable Y.

❸ Calculer $\mathbf{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{1})$.

❹ Décrire l'événement $[\mathbf{Y} = \mathbf{2}]$ et calculer $\mathbf{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{2})$.

❺ Montrer de manière détaillée, que $\mathbf{Y}$ suit la loi uniforme **sur** $\mathbf{Y(\Omega)}$.

❻ Déterminer son espérance $\mathbf{E(Y)}$ et sa variance $\mathbf{V(Y)}$.

❼ Soit $\mathbf{Z}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête.

a Exprimer $\mathbf{Z}$ en fonction de $\mathbf{Y}$.

b En déduire la loi de $\mathbf{Z}$, son espérance $\mathbf{E(Z)}$ et sa variance $\mathbf{V(Z)}$.

B- On tire simultanément deux boules dans l'urne puis on les remet. On définit la variable aléatoire $\mathbf{X}$ égale au nombre de boules rouges tirées.

❶ a Déterminer les valeurs possibles de $\boldsymbol{X}$.

b Combien y a-t-il de tirages possibles ?

c Déterminer la loi de $\boldsymbol{X}$. (On pourra faire des raisonnements combinatoires).

❷ On effectue maintenant une succession de $\boldsymbol{n}$ tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage). Soit $\mathbf{N}$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où les 2 boules tirées étaient rouges lors des $\boldsymbol{n}$ tirages. On admet que la probabilité d'avoir deux boules rouges lors d'un tirage est $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

a Déterminer la loi de $\boldsymbol{N}$.

b Donner son espérance et sa variance.

C- Soit $\boldsymbol{N}$ un entier supérieur ou égal à $\mathbf{2.}$ Dans cette partie, on effectue $\mathbf{N}$ tirages successifs d'une boule de l'urne successivement avec la règle suivante :
- si on tire la boule blanche, on la remet dans l'urne;
- si on tire une boule rouge, on ne la remet pas.
Pour $\boldsymbol{n} \in [\![\mathbf{1},\ \mathbf{N}]\!]$, on note $\mathbf{T}_{\boldsymbol{n}}$ le nombre de boules rouges tirées lors des $\boldsymbol{n}$ premiers tirages. On définit les événements:
$-\mathbf{B}_i$ **:**$\ll$ on tire la boule blanche au tirage numéro $\boldsymbol{i}$ $\gg$**;**
$-\mathbf{R}_i$ **:**$\ll$ on tire une boule rouge au tirage numéro $\boldsymbol{i}$ $\gg$**;**

❶ Déterminer la loi de $\mathbf{T_1}$.

❷ Déterminer la loi de $\mathbf{T_2}$ et calculer son espérance.

❸ Soit $\boldsymbol{n} \in [\![\mathbf{1},\ \mathbf{N}]\!]$.

a Déterminer la probabilité que $\mathbf{T}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$.

b Montrer, en justifiant correctement, que la probabilité que $\mathbf{T}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

c Calculer cette probabilité en fonction de $\boldsymbol{n}$ (exprimer sans symbole $\sum$).