Prof : Ahmed Karimine

Niveau : 1ECT

Lycée Errazi

Série n°3 ❀Couples de var aléatoires

Année scolaire : 2021-2022

Exercice 1

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4 . On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus petit des deux numéros obtenus.

❶ Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

❷ a) Déterminer la loi du couple (X_1, Y).

b) En déduire la loi de Y.

c) Peut-on obtenir la loi de X_1 de façon analogue?

Exercice 2

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y compris entre 1 et X.

❶ Donner la loi de X.

❷ Pour tout $x \in X(\Omega)$, donner la loi de Y sachant $[X = x]$.

❸ Déterminer la loi du couple (X, Y).

❹ En déduire la loi de Y et retrouver la loi de X.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$.

❶ Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit supérieure ou égale à 7.

❷ Déterminer la probabilité pour que la valeur prise par X soit paire.

❸ Déterminer la probabilité pour que les valeurs prises par X et Y soient égales.

❹ Déterminer la probabilité pour que la valeur prise par X soit inférieure ou égale à la valeur prise par Y.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$. On suppose que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

❶ Justifier que la variable aléatoire X est bien définie.

❷ Déterminer la loi conjointe de X et Y. Puis en déduire la loi de Y.

❸ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

❹ Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Que peut-on en conclure?

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.
On pose $S = X + Y$ et $D = XY$.

❶ Déterminer la loi du couple (S, D).

❷ En déduire les lois marginales de S et D.

❸ Calculer de trois manières différentes $\mathbb{B}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.

❹ Calculer $\mathbf{Cov}(S, D)$. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.
À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire, il ne reçoit aucun point.
Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : blanc, rouge, rouge, le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.
On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3 , les évènements :
B_k : "obtenir une boule blanche au k-ième tirage" et R_k : "obtenir une boule rouge au k-ième tirage".

❶ Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est-à-dire que X_2 est égale à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égale à 0 sinon.

a) Justifier que $[X_2 = 1] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2 = 1)$.

b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

❷ Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.

a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2.

b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer G en fonction de X_2 et X_3. En déduire $E(G)$.

❸ a) Exprimer l'évènement $[X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]$ en fonction de $B_1, B_2 B_3$ et R_1, R_2, R_3. En déduire que

$$P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = \frac{2}{9}$$

b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3).

	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$
$X_2 = 0$		
$X_2 = 1$		

c) En déduire que

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$$

❹ Calculer $V(G)$.